## Άσκηση

Το κινητό σύστημα $Oxyz(e_1, e_2, e_3)$ περιστρέφεται ως προς το αδρανειακό $\underline{O}xyz(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ με γωνιακή ταχύτητα $\omega = \sin t\, e_1 - \cos t\, e_2$. Η κινητή αρχή O έχει διάνυσμα θέσης ως προς το αδρανειακό σύστημα
$\rho = 2t\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - (t+1)\varepsilon_3$.
Ένα σωμάτιο P έχει διάνυσμα θέσης ως προς το κινητό σύστημα $r = -e_1 - te_2 + e_3$
Να βρεθούν η απόλυτη ταχύτητα και η επιτάχυνση του P.

## Λύση

Το διάνυσμα θέσης του P ως προς το αδρανειακό σύστημα είναι $R = \rho + r$

$$V_\alpha = \frac{dR}{dt} = V_0 + V_\sigma + \omega \times r \quad , \quad \frac{d\rho}{dt} = V_0 = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_3 \quad \text{απόλυτη παράγωγος}$$

(απόλυτη ~ σχετική)

$$\frac{d'r}{dt} = V_\sigma = -e_2 \quad \text{σχετική παράγωγος}$$

$$\omega \times r = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sin t & -\cos t & 0 \\ -1 & -t & 1 \end{vmatrix} = -\cos t\, e_1 - \sin t\, e_2 - t\sin t\, e_3 - \cos t\, e_3$$

$v_a = v_o + V_r$

Άρα $V_a = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_3 - e_2 - \cos t e_1 - \sin t e_2 - t\sin t e_3 - \cos t e_3 =$
$= 2\varepsilon_1 - \varepsilon_3 - \cos t e_1 - (1+\sin t)e_2 - (t\sin t + \cos t) e_3$

σχετική επιτάχυνση: $a_\sigma = \frac{d' V_\sigma}{dt} = 0$

Για να βρούμε την απόλυτη επιτάχυνση κάνουμε το εξής.
Η απόλυτη ταχύτητα $V_a = V_o + V$ όπου $V_o = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_3$ που αναφέρεται στο αδρανειακό σύστημα και
$V = -\cos t e_1 - (\sin t + 1) e_2 - (t\sin t + \cos t) e_3$

$$a_a = \frac{dV_a}{dt} = \frac{dV_o}{dt} + \frac{dV}{dt} = 0 + \frac{d'V}{dt} + \omega \times V$$

$$\frac{d'V}{dt} = \sin t e_1 - \cos t e_2 - (t\cos t) e_3$$

$$\omega \times V = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sin t & -\cos t & 0 \\ -\cos t & -\sin t - 1 & -(t\sin t + \cos t) \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\omega \times V = \cos t(t\sin t + \cos t) e_1 + \sin t(t\sin t + \cos t) e_2 + (-\sin t - 1) e_3$$

Άρα

$$a_a = (\sin t + \cos t(t\sin t + \cos t)) e_1 + (-\cos t + \sin t(t\sin t + \cos t)) e_2 + (-t\cos t - \sin t - 1) e_3$$ (απόλυτη επιτάχυνση)

## ΑΣΚΗΣΗ

Το κινητό σύστημα $Oxyz(e_1, e_2, e_3)$ περιστρέφεται ως προς αδρανειακό $\underline{O}xyz(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ με γωνιακή ταχύτητα $\omega = e_1 - e_2 + \cos t e_3$ ενώ η κινητή αρχή $O$ έχει διάνυσμα θέσης ως προς την $\underline{O}$ το $\rho = e_1 - 2e_2 + te_3$.
Ένα σωμάτιο $P$ έχει διάνυσμα θέσης ως προς το κινητό σύστημα $r = 2e_1 + e_2 - 2te_3$. Να βρεθούν η σχετική και απόλυτη ταχύτητα και επιτάχυνση του σωμάτιου $P$.

Λύση

διαν. θέσης: $R = \rho + r$  $[V_a = V_o + V]$

$$V_a = \frac{dR}{dt} = \frac{d\rho}{dt} + \frac{d'r}{dt} + \omega \times r = e_3 - 2e_3 + \omega \times r = -e_3 + \omega \times r$$

$$\omega \times r = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & \cos t \\ 2 & 1 & -2t \end{vmatrix} = (2t - \cos t) e_1 + (2t - 2\cos t) e_2 + 3e_3$$

άρα $V_a = (2t - \cos t) e_1 + (2t - 2\cos t) e_2 + 2e_3$ (απολυτη ταχύτητα)

$V_\sigma = \frac{d'r}{dt} = -2e_3 \Rightarrow a_\sigma = \frac{d'V_\sigma}{dt} = 0$ (σχετικη επιτάχυνση)

$$a_a = \frac{dv_a}{dt} = \cancelto{0}{\frac{dv_0}{dt}} + \frac{dv}{dt} = 0 + \frac{d'v}{dt} + \omega \times v$$

$v_0 = e_3$ άρα $v = v_a - v_0 = (2t - \cos t)e_1 + (2t - 2\cos t)e_2 + e_3$

$$\frac{d'v}{dt} = (2+\sin t)e_1 + (2 + 2\sin t)e_2$$

$$\omega \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sin t & -\cos t & 0 \\ 2t-\cos t & 2t-2\cos t & 1 \end{vmatrix} = -\cos t\, e_1 - \sin t\, e_2 + e_3 \cdot (2t\sin t - 2\cos t \sin t + 2t\cos t - \cos^2 t)$$

άρα $$a_a = (2 + \sin t - \cos t)e_1 + (2 + \sin t)e_2 + (2t\sin t - 2\cos t\sin t + 2t\cos t - \cos^2 t)$$

(απόλυτη επιτάχυνση)